Valuaciones de complejidad: un marco semántico general para lenguajes proposicionales

Juan Pablo Jorge[1,4], Hernán Luis Vázquez[2] y Federico Holik[3]

Facultad de Filosofía y Letras, UBA[1]
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UBA[2].
Instituto de Física La Plata, UNLP[3]
Instituto de Filosofía, Universidad Austral[4]

XVII Congreso Dr. Antonio Monteiro
7 al 10 de junio de 2023

Esquema de la presentación

1. Idea central de la presentación
2. Particiones doblemente numerables, PDN
3. Aplicaciones de las PDN a los conjuntos de interpretación
4. Ejemplo de aplicación
5. Criterios de adecuación para cada *complejidad*

Tabla de contenidos

Objetivo y marco formal

Objetivo Principal:

- Brindar un criterio efectivo para generar semánticas que permitan discriminar *complejidad* de las *fbf*.

- Queremos que el valor de verdad de una fórmula nos dé información acerca de su conectivo principal y complejidad.

Objetivo y marco formal

Objetivo Principal:

- Brindar un criterio efectivo para generar semánticas que permitan discriminar *complejidad* de las *fbf*.

- Queremos que el valor de verdad de una fórmula nos dé información acerca de su conectivo principal y complejidad.

- Marco formal: semánticas no deterministas de *Nmatrices*.

- Observación: entenderemos la *complejidad* de una fórmula como la cantidad de conectivos de la misma.

Tabla de contenidos

Generando las Particiones doblemente numerables (PDN)

De acuerdo con los razonamientos presentados en [Jorge-Vázquez,2020],

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 ...

Generamos sucesivos conjuntos de longitud doble que la anterior comenzando por longitud inicial 2.

Generando las Particiones doblemente numerables (PDN)

De acuerdo con los razonamientos presentados en [Jorge-Vázquez,2020],

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 ...

Generamos sucesivos conjuntos de longitud doble que la anterior comenzando por longitud inicial 2.

$$C_1 = \{1, 2\} \quad ; \quad C_2 = \{3, 4, 5, 6\} \quad ; \quad C_3 = \{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$$

$$C_4 = \{15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30\}, \text{etc.}$$

Con lo cual,

$$\mathbb{N} = \bigcup_{l=1}^{\infty} C_l \quad ; \quad C_l \cap C_{l'} = \emptyset \quad ; \quad l \neq l'.$$

Generando las PDN

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 ...

$$A_1 = \{1, 3, 7, 15, 31, ...\} \quad ; \quad a_{1,i+1} = 2.a_{1,i} + 1 \;\; ; \;\; a_{1,1} = 1$$

Generando las PDN

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 ...

$$A_1 = \{1, 3, 7, 15, 31, ...\} \quad ; \quad a_{1,i+1} = 2.a_{1,i} + 1 \;\; ; \;\; a_{1,1} = 1$$

$$A_2 = \{2, 4, 8, 16, 32, ...\} \quad ; \quad a_{2,i+1} = 2.a_{2,i} \;\; ; \;\; a_{2,1} = 2$$

Generando las PDN

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 ...

$$A_1 = \{1, 3, 7, 15, 31, ...\} \quad ; \quad a_{1,i+1} = 2.a_{1,i} + 1 \;;\; a_{1,1} = 1$$

$$A_2 = \{2, 4, 8, 16, 32, ...\} \quad ; \quad a_{2,i+1} = 2.a_{2,i} \;;\; a_{2,1} = 2$$

$$A_3 = \{5, 9, 17, 33, ...\} \quad ; \quad a_{3,i+1} = 2.a_{3,i} - 1 \quad ; \quad a_{3,1} = 5$$

$$A_4 = \{6, 10, 18, 34, ...\} \quad ; \quad a_{4,i+1} = 2.a_{4,i} - 2 \;;\; a_{4,1} = 6$$

$$A_5 = \{11, 19, 35, 67, ...\} \quad ; \quad a_{5,i+1} = 2.a_{5,i} - 3 \;;\; a_{5,1} = 11$$

$$\vdots$$

$$\mathbb{N} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad ; \quad A_n \cap A_{n'} = \emptyset \;,\; n \neq n' \quad \text{y} \quad \forall n \quad |A_n| = |\mathbb{N}| = \aleph_0 \qquad (1)$$

Algunas aplicaciones de las PDN

- Cada PDN, presenta una solución alternativa al problema del *Hotel de Hilbert* para el caso de numerables contingentes, cada uno numerable.
- De forma recursiva, permiten construir infinitos ejemplos (tantos como reales) de *conjuntos disjuntos y numerables cuya unión es numerable*. Resultado que sólo se puede probar de forma general con AE.
- Muestran un procedimiento efectivo para probar la equipotencia de $\mathbb{N}$ con $\mathbb{N}^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Tabla de contenidos

Conjuntos de interpretación para cada *complejidad*

A las variables proposicionales vamos a interpretarlas en dos conjuntos:

$$A_1 = \{1, 3, 7, 15, 31, ...\} \longleftrightarrow D_p \quad ; \quad A_2 = \{2, 4, 8, 16, 32, ...\} \longleftrightarrow N_p$$

Conjuntos de interpretación para cada *complejidad*

A las variables proposicionales vamos a interpretarlas en dos conjuntos:

$$A_1 = \{1, 3, 7, 15, 31, ...\} \longleftrightarrow D_p \quad ; \quad A_2 = \{2, 4, 8, 16, 32, ...\} \longleftrightarrow N_p$$

A las *fbf* de complejidad 1 asignamos ocho conjuntos:

$$A_3 = \{5, 9, 17, 33, ...\} \longleftrightarrow D_{\neg p} \quad ; \quad A_4 = \{6, 10, 18, 34, ...\} \longleftrightarrow N_{\neg p}$$

Conjuntos de interpretación para cada *complejidad*

A las variables proposicionales vamos a interpretarlas en dos conjuntos:

$$A_1 = \{1, 3, 7, 15, 31, ...\} \longleftrightarrow D_p \quad ; \quad A_2 = \{2, 4, 8, 16, 32, ...\} \longleftrightarrow N_p$$

A las *fbf* de complejidad 1 asignamos ocho conjuntos:

$$A_3 = \{5, 9, 17, 33, ...\} \longleftrightarrow D_{\neg p} \quad ; \quad A_4 = \{6, 10, 18, 34, ...\} \longleftrightarrow N_{\neg p}$$

$$A_5 = \{11, 19, 35, 67, ...\} \longleftrightarrow D_{p \vee q} \; ; \; A_6 = \{a_{6,1}, a_{6,2}, a_{6,3}, a_{6,4}, ...\} \longleftrightarrow N_{p \vee q}$$

$$A_7 = \{a_{7,1}, a_{7,2}, a_{7,3}, a_{7,4}, ...\} \longleftrightarrow D_{p \wedge q} \; ; \; A_8 = \{a_{8,1}, a_{8,2}, a_{8,3}, a_{8,4}, ...\} \longleftrightarrow N_{p \wedge q}$$

$$A_9 = \{a_{9,1}, a_{9,2}, a_{9,3}, ...\} \longleftrightarrow D_{p \to q} \; ; \; A_{10} = \{a_{10,1}, a_{10,2}, a_{10,3}, ...\} \longleftrightarrow N_{p \to q}$$

Conjuntos de interpretación para cada complejidad

$$A_{11} \longleftrightarrow D^2_{\neg} \quad ; \quad A_{12} \longleftrightarrow N^2_{\neg}$$

$$A_{13} \longleftrightarrow D^2_{\vee} \quad ; \quad A_{14} \longleftrightarrow N^2_{\vee}$$

$$A_{15} \longleftrightarrow D^2_{\wedge} \quad ; \quad A_{16} \longleftrightarrow N^2_{\wedge}$$

$$A_{17} \longleftrightarrow D^2_{\rightarrow} \quad ; \quad A_{18} \longleftrightarrow N^2_{\rightarrow}$$

Tenemos asegurados diferentes conjuntos (designados y no designados) para todas las fórmulas de diferente complejidad, aunque compartan su conectivo principal.

Tabla de contenidos

Ejemplo

Si $\Psi = p \vee (\neg q)$ y v es una valuación, tal que $v(p) \in D, v(q) \in D$, entonces con la semántica clásica tenemos: $D = \{1\}$

$$v(p) = v(q) = 1 \quad ; \quad v(\neg q) = 0 \in \widetilde{\neg}_{(1)} \quad ; \quad v(p \vee (\neg q)) = 1 \in \widetilde{\vee}_{(1,0)}$$

Ejemplo

Si $\Psi = p \vee (\neg q)$ y v es una valuación, tal que $v(p) \in D, v(q) \in D$, entonces con la semántica clásica tenemos: $D = \{1\}$

$$v(p) = v(q) = 1 \quad ; \quad v(\neg q) = 0 \in \widetilde{\neg}_{(1)} \quad ; \quad v(p \vee (\neg q)) = 1 \in \widetilde{\vee}_{(1,0)}$$

Si usamos las valuaciones de complejidad:

$$v(p) = a \in D_p = A_1 \quad ; \quad v(q) = b \in D_p = A_1$$

$$v(\neg q) = c \in \widetilde{\neg}^1_{(a)} = N_{\neg p} = A_4 \quad ; \quad v(p \vee \neg q) = d \in \widetilde{\vee}^2_{(a,c)} = D^2_{\vee} = A_{13}$$

Ejemplo

Si $\Psi = p \vee (\neg q)$ y v es una valuación, tal que $v(p) \in D, v(q) \in D$, entonces con la semántica clásica tenemos: $D = \{1\}$

$$v(p) = v(q) = 1 \quad ; \quad v(\neg q) = 0 \in \widetilde{\neg}_{(1)} \quad ; \quad v(p \vee (\neg q)) = 1 \in \widetilde{\vee}_{(1,0)}$$

Si usamos las valuaciones de complejidad:

$$v(p) = a \in D_p = A_1 \quad ; \quad v(q) = b \in D_p = A_1$$

$$v(\neg q) = c \in \widetilde{\neg}^1_{(a)} = N_{\neg p} = A_4 \quad ; \quad v(p \vee \neg q) = d \in \widetilde{\vee}^2_{(a,c)} = D^2_{\vee} = A_{13}$$

Conclusión:

$$\text{clásicamente} \longrightarrow v(p \vee (\neg q)) = 1 \in \widetilde{\vee}_{(1,0)} = \{1\}$$

$$\text{complejidad} \longrightarrow v(p \vee \neg q) = d \in \widetilde{\vee}^2_{(a,c)} = D^2_{\vee} = A_{13}$$

Si $v(p \vee \neg q) = a_{13,i}$, viendo el valor de la valuación, obtenemos información sobre la complejidad y conectivo principal de la fórmula.

Tabla de contenidos

Criterios de *adecuación* para cada *complejidad*

Caso semántica bivaluada clásica [Avron,2007]

Sea $\Psi = \phi_1 \vee \phi_2$, tal que $compl(\psi) = \alpha$, $compl(\phi_1) = \beta$ y $compl(\phi_2) = \gamma$. Entonces,

$$v(\psi) \in \widetilde{\triangledown}_{\alpha(a,b)} \quad ; \quad v(\phi_1) = a \in \widetilde{\odot}_{\beta} \quad ; \quad v(\phi_2) = b \in \widetilde{\Diamond}_{\gamma}$$

Criterios de *adecuación* para cada *complejidad*

Caso semántica bivaluada clásica [Avron,2007]

Sea $\Psi = \phi_1 \vee \phi_2$, tal que $compl(\psi) = \alpha$, $compl(\phi_1) = \beta$ y $compl(\phi_2) = \gamma$. Entonces,

$$v(\psi) \in \widetilde{\vee}_{\alpha(a,b)} \quad ; \quad v(\phi_1) = a \in \widetilde{\odot}_{\beta} \quad ; \quad v(\phi_2) = b \in \widetilde{\Diamond}_{\gamma}$$

$$\widetilde{\vee}_{\alpha(a,b)} : \begin{array}{l} \text{Si } a \in D^{\beta}, b \in V^{\gamma}\,;\, \beta + \gamma = \alpha - 1, \text{entonces } \widetilde{\vee}_{\alpha} \subseteq D^{\alpha}_{\vee} = A_{8\alpha-3} \\ \text{Si } b \in D^{\gamma}, a \in V^{\beta}\,;\, \beta + \gamma = \alpha - 1, \text{entonces } \widetilde{\vee}_{\alpha} \subseteq D^{\alpha}_{\vee} = A_{8\alpha-3} \\ \text{Si } a \in N^{\beta}, b \in N^{\gamma}\,;\, \beta + \gamma = \alpha - 1, \text{entonces } \widetilde{\vee}_{\alpha} \subseteq N^{\alpha}_{\vee} = A_{8\alpha-2} \end{array} \qquad (2)$$

¡Agradecemos tu consulta o sugerencia!

E-mail: jorgejpablo@gmail.com

1. Jorge, J.P., Vázquez, H.L. (2021). *Retornando al Hotel de Hilbert*. Revista de Educación Matemática, 36(2),67–87.https://doi.org/10.33044/revem.32687

2. Arnon Avron. *Non-deterministic Semantics for Families of Paraconsistent Logics*, pages 285–320. Studies in logic. College Publications, 2007. "Handbook of paraconsistency" was developed following the III World Congress on Paraconsistency held in 2003 in Toulouse, France. 30

3. Jorge, J.P., Vázquez, H.L., Holik, F. *Valuaciones de complejidad: un marco semántico general para lenguajes proposicionales*.